1、

(a)

Reflexivity : $a \le a \Rightarrow a \le_R a$

Transitivity : 若 $a \le_R b$ 且 $b \le_R c \Rightarrow b \le a$ 且 $c \le b \Rightarrow c \le a$

Anti-symmetry : 若 $a \le_R b$ 且 $b \le_R a \Rightarrow b \le a$ 且 $a \le b \Rightarrow a = b$

(b)

if $glb(a,b) = c$ (∵ $a \le c$. 且 $b \le c \Rightarrow c \le_R a$. 且 $c \le_R b$ 且 $(A, \le)$ is a lattice)

then c is the unique $lub_R(a,b)$.

if $lub(a,b) = d$ (∵ $d \le a$ 且 $d \le b \Rightarrow a \le_R d$ 且 $b \le_R d$ 且 $(A, \le)$ is a lattice)

then d is the unique $glb_R(a,b)$

2.

考慮 n 個整數

$x_1 = a_1$

$x_2 = a_1 + a_2$

$x_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

分成二种情況討論

① 若在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 此 n 個數中有一者可被 n 整除 ex. x_k.
則 i 取 1. j 取 k. 得証

② 否則 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 此 n 個數沒有一個可被 n 整除 即餘數不為 0
而被 n 所除餘數必為 $0, 1, 2, \cdots, n-1$, 又此 n 个數被 n 除
一定不為 0. 所以只有 $1, 2, \cdots, n-1$, n-1 种可能性.
依鴿籠原理 必存在二个數 x_i, x_j 被 n 除餘數相同
則 $x_j - x_i$ 必可被 n 整除 $\Rightarrow a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$ 可被 n 整除. 得証

3.

(a) 先考慮 boys 的排列 $10!$

再從 boys 中的間隔安插 girls，即 C^{11}_5，再行排列 $\Rightarrow C^{11}_5 \times 5! = P^{11}_5$

所以總方法數為 $10! \cdot P^{11}_5$.

(b) 先考慮 boys 的排列.（即先固定一人再行排列，$9!$）

再從 boys 中的間隔安插 girls，此時 boys 間隔只有 10 個 即 C^{10}_5，再行排列 $\Rightarrow C^{10}_5 \times 5! = P^{10}_5$

所以總方法數為 $9! \cdot P^{10}_5$

4.

首先考慮第一個人，與其配對的方法有 $2n-1$ 種，擇其一做組合

再從剩於排一人討論，與其配對的方法剩 $2n-3$，因為有 2 人配一對，

以此類推

則配對成 n 對的方法有 $(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$

5.

考慮取 red ball 的方法有取 0 個，1 個，3 個，4 個，…，或 r 個，

其對應的生成函數為 $1+z+z^3+z^4+\cdots+z^{100}$

同理 bule ball 為 $1+z+z^2+z^4+z^5+\cdots+z^{50}$

white ball 為 $1+z+z^2+z^3+z^5+z^6+\cdots+z^{50}$

所以 a 的 generation function 為

$(1+z+z^3+z^4+\cdots+z^{100})\cdot(1+z+z^2+z^4+z^5+\cdots+z^{50})\cdot(1+z+z^2+z^3+z^5+z^6+\cdots+z^{50})$

$= \left(\frac{1-z^{101}}{1-z}-z^2\right)\cdot\left(\frac{1-z^{51}}{1-z}-z^3\right)\cdot\left(\frac{1-z^{51}}{1-z}-z^4\right)$

6.

$$\log_2(n!) = \log_2 n + \log_2(n-1) + \cdots + \log_2 2 + \log_2 1$$
$$\leq \log_2 n + \log_2 n + \cdots + \log_2 n + \log_2 n = n\log_2 n, \ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \log_2(n!) = O(n\log n)$$

7.

(a) l, m.

(b) a, b, c.

(c) no.

(d) no

(e) l, k, m

(f) k

(g) no

(h) no.

8.

$$a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$$

令 $A(z)$ 為 a_k 的 generating function $\Rightarrow A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

$$a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k}_{=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - a_0} = 3\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} z^k}_{=3\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)z} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1} z^k}_{=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(4z)^k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-4z}-1\right)}$$

$$\Rightarrow A(z) - a_0 = 3zA(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-4z} - 1\right) \Rightarrow 0 = (3z-1)A(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-4z} + 3\right) (\because a_0 = 1)$$

$$\Rightarrow A(z) = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1-4z} + 3\right)\cdot\frac{1}{(3z-1)} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1+3-12z}{1-4z}\right)\frac{1}{1-3z}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4(1-3z)}{(1-4z)}\cdot\frac{1}{1-3z}\right) = \frac{1}{1-4z} = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k z^k$$

$$\Rightarrow A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k z^k \Rightarrow a_k = 4^k \quad \#$$

9.

(a) ∵ $\lceil x \rceil$ 為一整數 ∴ $\lfloor \lceil x \rceil \rfloor = \lceil x \rceil$

(b) It is not always true

假設 $x = y = \frac{3}{4}$，則 $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor \frac{3}{4}+\frac{3}{4} \rfloor = 1$ 但 $\lfloor \frac{3}{4} \rfloor + \lfloor \frac{3}{4} \rfloor = 0+0=0$

10.

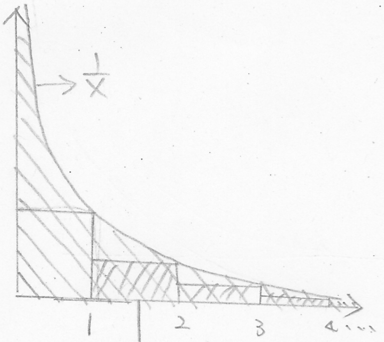
(a) $\frac{1}{(1+x)^8} = (1+x)^{-8} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-8}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C(8+i-1, i) \cdot x^i$

依題目要求取 $i=12 \Rightarrow x^{12}$ 之係數為 $(-1)^{12} C(8+12-1, 12) = C^{19}_{12}$ #

(b) $\frac{x^3}{(1+4x)^2} = x^3 \cdot (1+4x)^{-2} = x^3 \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-2}{i} (4x)^i \right) = x^3 \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C^{2+i-1}_{i} 4^i \cdot x^i \right)$

依題目要求取 $i=9 \Rightarrow x^{12}$ 之係數為 $(-1)^9 4^9 \cdot C^{2+9-1}_{9} = (-4)^9 \cdot C^{10}_{9}$ #

11.



反斜線部分面積為 $\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}$、而斜線面積為 $\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx$.

由圖可知 $\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} < \int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx$

又

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = 1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} < 1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx = 1+\ln n-1 = \ln n$$

所以 $H_n = O(\log n)$